

Zhodnotenie presnosti výpočtu parciálnych derivácií prvého rádu z TIN

Martin Kalivoda

Univerzita Komenského v Bratislave, Prírodovedecká fakulta, Katedra kartografie,
geoinformatiky a diaľkového prieskumu Zeme, Mlynská dolina, 842 15 Bratislava, Slovensko
kalivoda.martin@gmail.com

Abstrakt. Príspevok je zameraný na analýzu digitálnych modelov georeliéfu reprezentovaných pomocou nepravidelných trojuholníkových sietí (TIN). Prezentuje postup výpočtu parciálnych derivácií prvého rádu z nepravidelnej trojuholníkovej siete. Hodnotí presnosť výpočtu porovnaním hodnôt parciálnych derivácií prvého rádu vypočítaných priamym derivovaním funkcie opisujúcej etalónovú plochu a vypočítaných z vygenerovanej trojuholníkovej siete (reprezentujúcej tú istú etalónovú plochu).

Kľúčové slová: TIN, parciálne derivácie prvého rádu, odchýlky hodnôt

Abstract. The study is focused on the analysis of digital georelief models represented by triangular irregular networks (TIN). It presents a method of calculating the first order partial derivatives from triangular irregular network. It evaluates the accuracy of calculation by comparing the values of the first order partial derivatives calculated by direct differentiation of function which describes etalon area and the first order partial derivatives calculated from the generated triangular network (representing the same etalon area).

Keywords: TIN, partial derivatives of the first order, deviations of values

1 Úvod a formulácia cieľa

Georeliéf je fenoménom krajiny sféry Zeme. Sústreď sa na ňom prevažná väčšina ľudských aktivít, preto mu ľudská spoločnosť od nepamäti venuje patričnú pozornosť, opisuje ho a študuje ho.

Jedným z prístupov štúdia je morfometrická analýza georeliéfu, ktorá skúma geometrickú štruktúru georeliéfu na báze aparátu teórie polí. Jej základy nezávisle od seba položili I. S. Evans (1972) a J. Krcho (1973). Dynamický vedecko-technický pokrok najmä v oblasti informačných technológií rozšíril aplikačné možnosti morfometrickej analýzy georeliéfu. Začali sa rozvíjať geografické informačné systémy (GIS), ktorých neodmysliteľnou súčasťou sa stal komplexný digitálny model georeliéfu (KDMR).

Digitálne modely georeliéfu sa snažia rekonštruovať georeliéf v abstraktnom prostredí počítača. Vstupom na rekonštrukciu georeliéfu je podrobné diskkrétne bodové pole (PDBP), ktoré nesie najmä polohovú informáciu o stave georeliéfu, ale môže niesť aj rôzne doplnkové informácie. Georeliéf a jeho geometrickú štruktúru

možno z PDBP rekonštruovať prostredníctvom interpolačných a aproximačných funkcií alebo prostredníctvom trojuholníkových sietí [4]. Výhodami reprezentácie georeliéfu pomocou nepravidelných trojuholníkových sietí sú najmä malé požiadavky na pamäť počítača, výpočtová nenáročnosť, schopnosť prostredníctvom nich zachytiť rôznorodé tvary georeliéfu a možnosť jednoduchej kalkulácie parciálnych derivácií (ktoré vstupujú do výpočtu morfometrických parametrov georeliéfu).

V našom príspevku chceme nadviazať na doteraz získané poznatky o modelovaní georeliéfu pomocou TIN a pretaviť ich do aplikačnej roviny. Na tieto účely slúži nami naprogramovaná počítačová aplikácia, ktorá je schopná na základe algoritmu zohľadňujúceho vybrané podmienky kvality trojuholníkovej siete vygenerovať zo vstupného bodového poľa trojuholníkovú sieť a následne z nej vypočítať parciálne derivácie prvého rádu. Funkcionalitu naprogramovanej počítačovej aplikácie demonštrujeme na fiktívnej topografickej ploche georeliéfu, tzv. etalóne matematicky určenom polynómickou funkciou n -tého stupňa. Následne na základe rôznych štatistických prístupov zhodnotíme presnosť výpočtu parciálnych derivácií prvého rádu vo vrcholoch trojuholníkov vypočítaných z trojuholníkovej siete porovnaním ich hodnôt s exaktnými hodnotami parciálnych derivácií prvého rádu vypočítanými priamym derivovaním predpisu funkcie etalónovej plochy $z = z(x, y)$.

V ďalšom texte budeme parciálnu deriváciu $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ označovať symbolom z_x a parciálnu deriváciu $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ označovať symbolom z_y .

2 Materiál a metódy

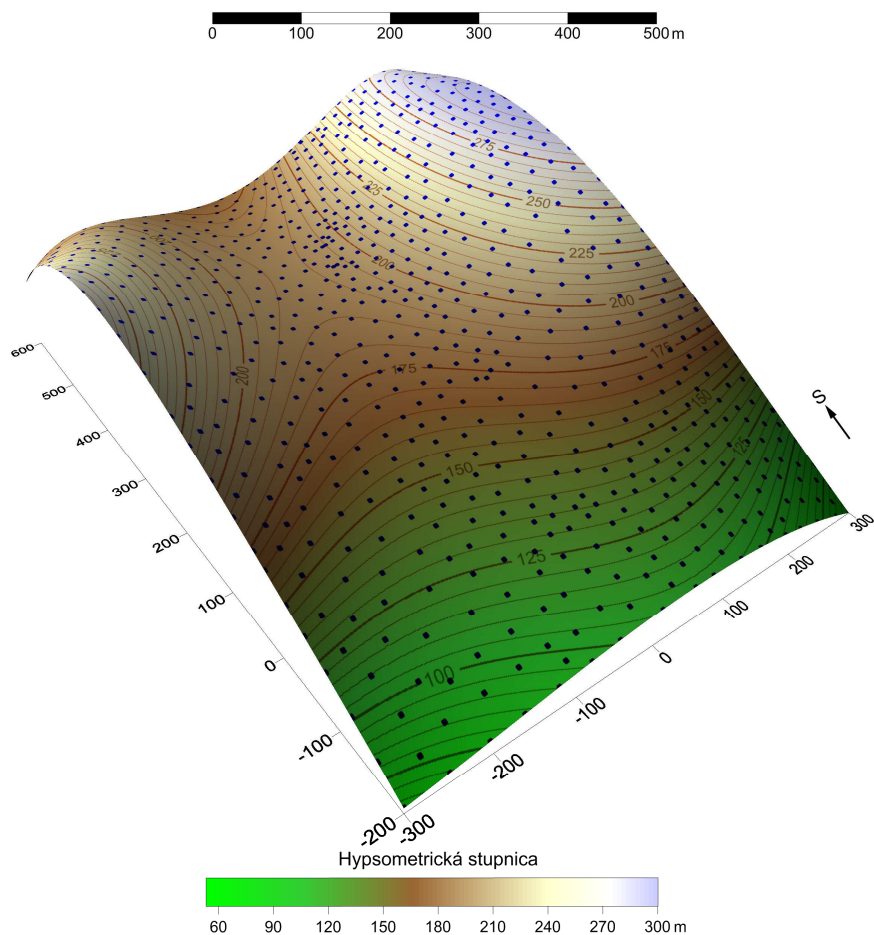
V príspevku vychádzame z experimentu realizovanom v bakalárskej práci a nadväzujeme naň. Cieľom bakalárskej práce bolo zostaviť ucelený algoritmus automatizovanej tvorby primárnej TIN a výpočtu parciálnych derivácií prvého rádu v jej vrcholoch.

Algoritmus sme verifikovali na predpísom určenej etalónovej ploche (Obr. 1). Definičnú funkciu etalónovej plochy sme prevzali z práce [1]. Jej tvar je

$$z = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n a_{rs} x^r y^s \quad \text{pre } n = 4. \quad (1)$$

Geometrickú štruktúru tohto polynómu sme vyšetrovali v intervaloch $\langle x_d = -300m; x_h = 300m \rangle$, $\langle y_d = -200m; y_h = 600m \rangle$, pričom hodnoty koeficientov a_{rs} sú: $a_{04} = a_{13} = a_{14} = a_{22} = a_{24} = a_{31} = a_{40} = a_{41} = a_{42} = 0$, $a_{00} = 150$, $a_{01} = 0,2$, $a_{02} = -1,5 \cdot 10^{-4}$, $a_{03} = -2,0 \cdot 10^{-7}$, $a_{10} = 0,1$, $a_{11} = 1,6 \cdot 10^{-4}$, $a_{12} = -1,2 \cdot 10^{-6}$, $a_{20} = 1,0 \cdot 10^{-4}$, $a_{21} = 3,2 \cdot 10^{-6}$, $a_{23} = 2,0 \cdot 10^{-12}$, $a_{30} = -1,0 \cdot 10^{-6}$, $a_{32} = -1,0 \cdot 10^{-12}$, $a_{33} = -1,0 \cdot 10^{-14}$, $a_{34} = 2,5 \cdot 10^{-17}$, $a_{43} = -5,0 \cdot 10^{-17}$, $a_{44} = -1,0 \cdot 10^{-19}$.

Na takto definovanej etalónovej ploche sme si v stanovených intervaloch vybrali 759 bodov a na základe hodnôt súradníc x , y ich dosadením do vzťahu (1) vypočítali hodnoty výšok z . Výšky z variujú v intervale $\langle z_d = 38,664m; z_h = 326,974m \rangle$.



Obr. 1. Etalónová plocha s lokalizáciou
podrobného diskrétného bodového poľa (PDBP)

V práci porovnáme vypočítané parciálne derivácie zo štyroch nepravidelných trojuholníkových sietí opisujúcich tú istú etalónovú plochu. Všetky trojuholníkové siete sa budú iteratívne generovať z počiatočnej strany tvorenej bodmi s číslami 1 a 4.

Triangulačná metóda použitá na tvorbu trojuholníkových sietí je nami upravená podľa metódy opisovanej v práci [5]. Jej algoritmus je opísaný v práci [4]. Túto dátovo-závislú iteratívnu metódu sme implementovali do počítačovej aplikácie, ktorú sme nazvali *PrimTroS* (názov predstavuje skratku zo slov primárna trojuholníková sieť).

Na tvorbu každej trojuholníkovej siete zvolíme inú hodnotu kritéria s_{LIM} (limitnej dĺžky strany trojuholníka, ktorá je jedným z parametrov reprezentatívnosti TIN) v poradí 65m, 66m, 79m a 80m. Tieto hodnoty sú volené zámerne, aby sme porovnali zmeny presnosti výpočtu parciálnych derivácií jednak medzi podobnými TIN

z hľadiska hodnoty s_{LIM} , jednak na základe značne rozdielnych TIN. Treba podotknúť, že pri rôznych hodnotách kritéria s_{LIM} bude využitá vždy iná podmnožina vstupných bodov, z ktorej budú trojuholníkové siete pozostávať.

Parciálne derivácie prvého rádu vo vrcholoch TIN určujeme v dvoch krokoch. V prvom kroku vypočítame hodnoty parciálnych derivácií pre každý trojuholník. Každému trojuholníku prislúcha jedna rovina definovaná jeho vrcholovými bodmi A_i, A_j, A_l a parciálne derivácie z_x a z_y nám určujú naklonenie tejto roviny. My budeme parciálne derivácie vzťahovať do ťažiska T trojuholníka.

Trojuholník určený bodmi $A_i(x_i, y_i, z_i), A_j(x_j, y_j, z_j), A_l(x_l, y_l, z_l)$ môžeme vyjadriť v tvare vektorového súčtu

$$v_{ij} \times v_{il} = (A_j - A_i) \times (A_l - A_i) = D_x i + D_y j + D_z k \quad (2)$$

vektorov reprezentujúcich strany trojuholníka [2]. Subdeterminanty D_x, D_y, D_z majú tvar

$$D_x = \begin{vmatrix} \Delta y_{ij} & \Delta z_{ij} \\ \Delta y_{il} & \Delta z_{il} \end{vmatrix}, \quad D_y = - \begin{vmatrix} \Delta x_{ij} & \Delta z_{ij} \\ \Delta x_{il} & \Delta z_{il} \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} \Delta x_{ij} & \Delta y_{ij} \\ \Delta x_{il} & \Delta y_{il} \end{vmatrix} \quad (3)$$

a okrem významu súradníc vektora normály k rovine trojuholníka sú vstupnými parametrami na výpočet parciálnych derivácií z_x a z_y v ťažisku trojuholníka

$$z_x = -\frac{D_x}{D_z}, \quad z_y = -\frac{D_y}{D_z} \quad (4)$$

V druhom kroku určíme približné hodnoty parciálnych derivácií vo vrcholoch TIN. Majme q trojuholníkov z vnútra trojuholníkovej siete, ktoré majú spoločný vrchol A_i . Priamo zo subdeterminantov, resp. súradníc normálových vektorov $(D_x)_k, (D_y)_k, (D_z)_k$ každého jedného trojuholníka so spoločným vrcholom A_i , kde k nadobúda hodnoty od 1 do q , môžeme určiť približné hodnoty parciálnych derivácií $(z_x)_i^*$ a $(z_y)_i^*$ vo vrchole A_i

$$(z_x)_i^* = -\frac{\sum_{k=1}^q (D_x)_k}{\sum_{k=1}^q (D_z)_k}, \quad (z_y)_i^* = -\frac{\sum_{k=1}^q (D_y)_k}{\sum_{k=1}^q (D_z)_k} \quad (5)$$

Keďže subdeterminanty $(D_x)_k, (D_y)_k, (D_z)_k$ predstavujú súradnice normály k rovine k -teho trojuholníka, pre korektné vyčíslenie vzťahov (5) je potrebné zabezpečiť, aby mali normály všetkých q trojuholníkov prislúchajúcich každému bodu A_i rovnakú orientáciu.

Následne takto vypočítané hodnoty parciálnych derivácií odpočítame od exaktné vyčíslených hodnôt určených priamym derivovaním predpisu (1). V každom vrchole

získame diferencie parciálnych derivácií prvého rádu. Pokiaľ bude hodnota diferencie kladná, parciálna derivácia určená z TIN je menšia ako skutočná hodnota. Pokiaľ bude hodnota diferencie záporná, parciálna derivácia určená z TIN je väčšia ako skutočná hodnota.

Hodnoty diferencií parciálnych derivácií následne podrobíme analýzam. Inšpirujeme sa metódami uvádzanými v práci [3]. Priestorovú diferenciaciu odchýlok parciálnych derivácií zobrazíme v podobe 2,5D modelov. Vypočítame štatistické veličiny priemer, medián, smerodajnú odchýlku a strednú kvadratickú chybu a zostavíme histogramy hustoty pravdepodobností výskytu jednotlivých hodnôt diferencií priradených do intervalov s rozsahom $0,01$.

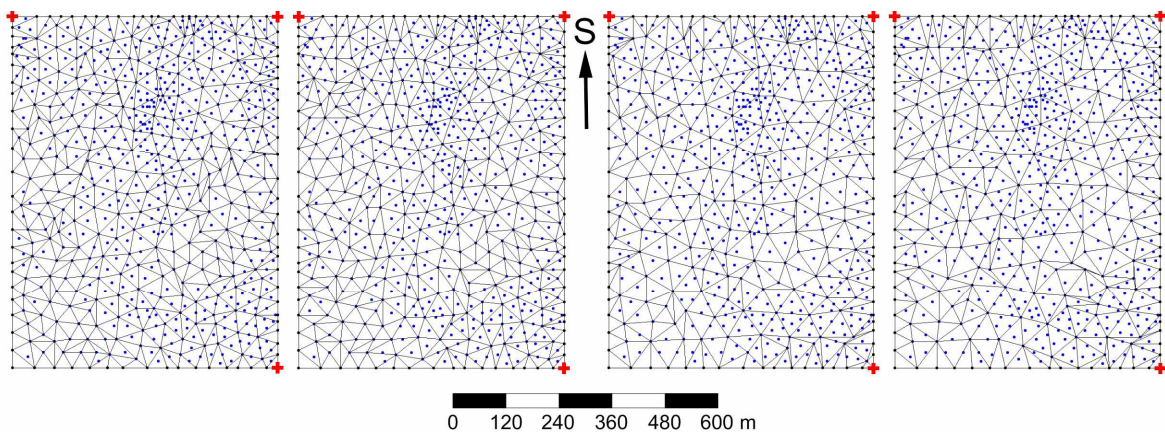
3 Výsledky a diskusia

Na základe vstupných parametrov, ktorými boli čísla bodov prvej strany prvého trojuholníka a hodnota kritéria s_{LIM} , boli vygenerované štyri trojuholníkové siete a následne vypočítané a podrobené analýzam parciálne derivácie z_x, z_y .

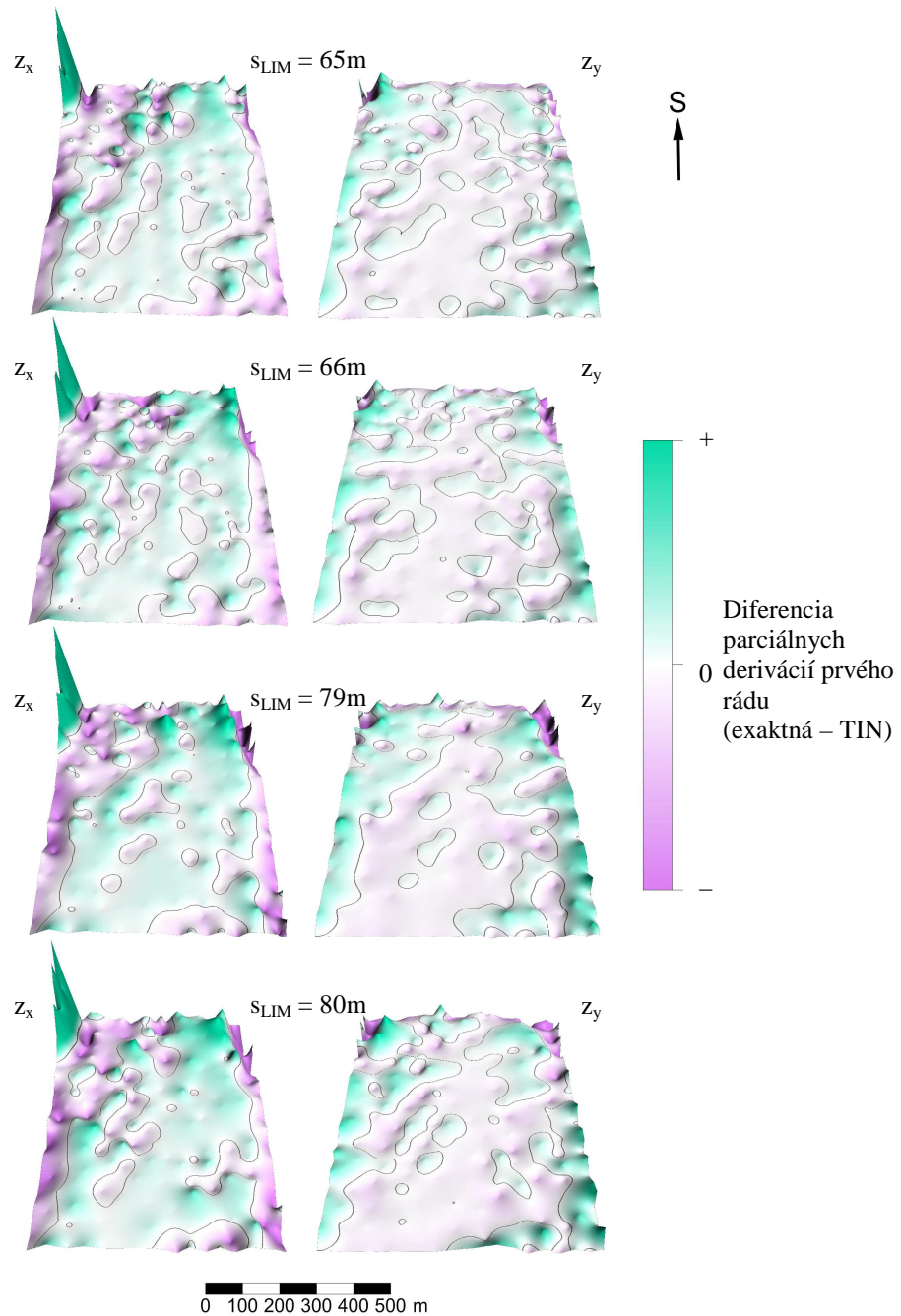
Z *Tabuľky 1* je zrejмый trend, podľa ktorého presnosť výpočtu parciálnych derivácií klesá so zvyšujúcou sa hodnotou parametra s_{LIM} . Vidíme, že tento nepriamoúmerný trend platí aj pre počet vrcholov a z nich vytvorených trojuholníkov. Za povšimnutie stoja aj intervaly variácií parciálnych derivácií. Tieto sú totožné pre všetky hodnoty s_{LIM} pri z_x a z_y vypočítaných z TIN aj exaktne. Uvedené hraničné hodnoty striedavo prislúchajú trom rohovým bodom trojuholníkovej siete, ktoré sú zobrazené červenou farbou na *Obr. 2*. Tieto body ležia v miestach s najväčšími sklonmi etalónovej plochy v danom rozsahu, a to priamo súvisí s extrémnymi hodnotami parciálnych derivácií. Na túto skutočnosť nadväzuje aj fakt, že pri intervaloch variácií diferencií z_x je horná hranica intervalu totožná pre všetky TIN. To je spôsobené tým, že rohovým bodom prislúcha vždy len jeden trojuholník, a tak parciálne derivácie v rohových bodoch vyčíslené podľa vzťahu (5) sú totožné s parciálnymi deriváciami ťažiska prislúchajúceho trojuholníka a sú zaťažené značnou odchýlkou. Priestorová diferenciacia odchýlok parciálnych derivácií je zachytená v blokdiagramoch na *Obr. 3*. Priebeh odchýlok bol interpolovaný s použitím metódy *kriging*. Z ostatných štatistických charakteristík vidno, že TIN s $s_{LIM} = 65m$ podáva najlepšie výsledky pri parciálnych deriváciách z_x . Na druhej strane, TIN s $s_{LIM} = 66m$ podáva najlepšie výsledky pri parciálnych deriváciách z_y . O niečo reprezentatívnejšia je však trojuholníková sieť s $s_{LIM} = 65m$.

Tabuľka 1. Charakteristiky trojuholníkových sietí a parciálnych derivácií

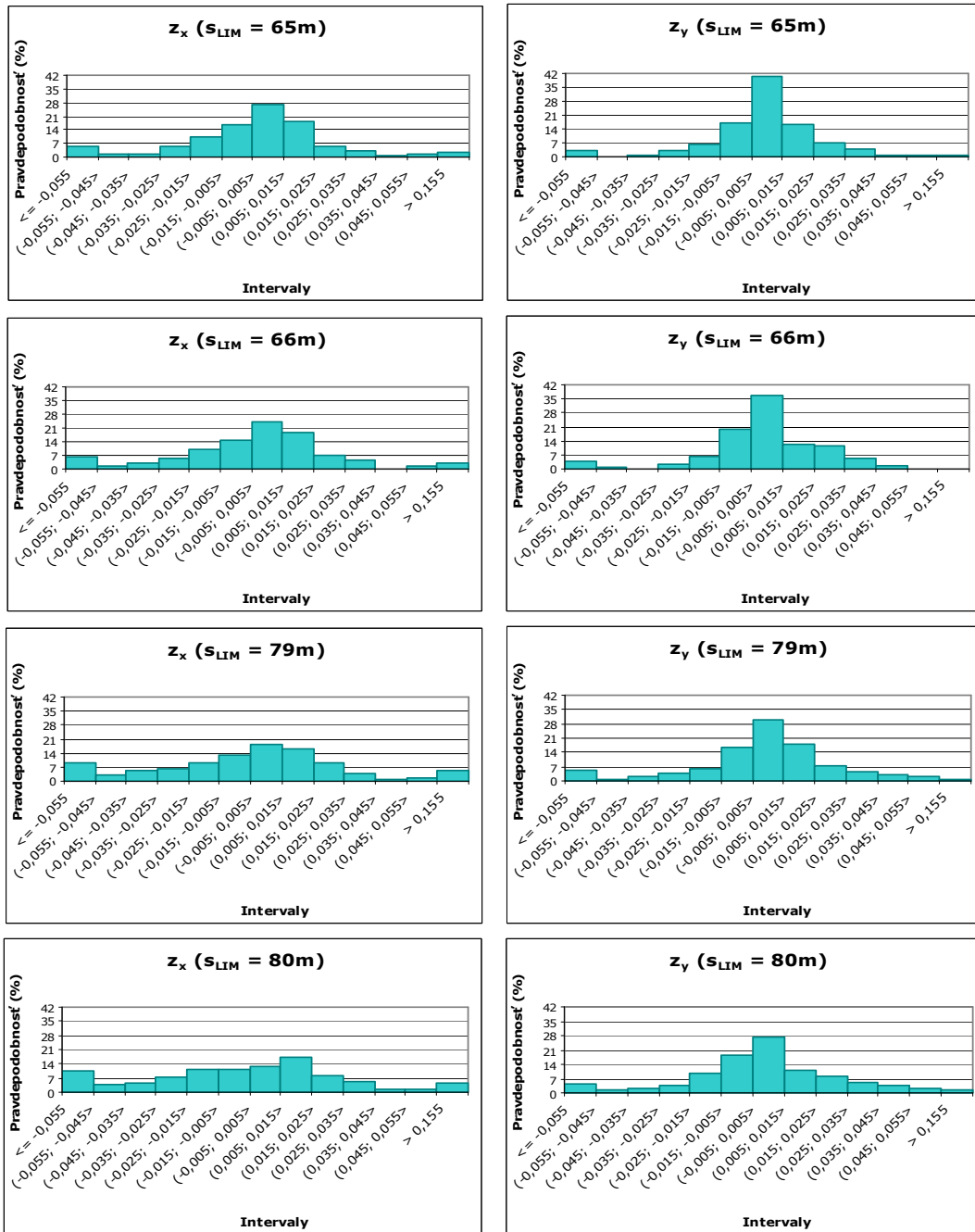
s_{LIM} [m]	65	66	79	80
Číslo počiatočných bodov	[1; 4]	[1; 4]	[1; 4]	[1; 4]
Počet vrcholov	342	330	238	237
Počet trojuholníkov	595	571	387	385
Interval variácií z_x vyčíslených z TIN			<-1,158; 0,308>	
Interval variácií z_x vyčíslených exaktne			<-1,406; 0,783>	
Interval variácií z_y vyčíslených z TIN			<-0,904; 0,667>	
Interval variácií z_y vyčíslených exaktne			<-0,976; 0,672>	
Interval variácií diferencií z_x	<- 0,248 ; 0,475 >	<-0,303; 0,475>	<-0,283; 0,475>	<-0,337; 0,475>
Interval variácií diferencií z_y	<-0,223; 0,101>	<- 0,183 ; 0,050 >	<-0,223; 0,066>	<-0,279; 0,073>
Priemer diferencií z_x	-0,00221	-0,00502	-0,00430	-0,00550
Priemer diferencií z_y	-0,00216	-0,00232	-0,00363	-0,00361
Medián diferencií z_x	-0,00064	-0,00142	-0,00210	-0,00385
Medián diferencií z_y	-0,00056	-0,00011	-0,00081	-0,00158
Smerodajná odchýlka diferencií z_x	0,05493	0,05760	0,06976	0,07077
Smerodajná odchýlka diferencií z_y	0,02485	0,02445	0,03081	0,03472
Stredná kvadratická chyba diferencií z_x	0,05498	0,05782	0,06989	0,07098
Stredná kvadratická chyba diferencií z_y	0,02495	0,02456	0,03103	0,03490



Obr. 2. Vygenerované TIN s rôznymi limitnými hodnotami dĺžok strán (zľava doprava 65m, 66m, 79m, 80m) a rohovými bodmi, v ktorých z_x , z_y dosahujú extrémny



Obr. 3. Blokdigramy diferencií parciálnych derivácií z_x , z_y v bodoch TIN s nulovou izočiarou (zhora dole $s_{LIM} = 65m$, $s_{LIM} = 66m$, $s_{LIM} = 79m$, $s_{LIM} = 80m$)



Obr. 4. Histogramy hustoty pravdepodobností intervalov diferencií parciálnych derivácií

Na základe *Obr. 4* možno tvrdiť, že rozdelenie pravdepodobností výskytu jednotlivých intervalov diferencií parciálnych derivácií pri všetkých TIN sa približuje normálnemu rozdeleniu náhodnej premennej. Avšak aj tu je zrejмый trend znižovania reprezentatívnosti trojuholníkových sietí s narastajúcim parametrom s_{LIM} . Z histogramov diferencií parciálnych derivácií z_x možno bádať znižovanie špicatosti rozdelení za zvyšovania početnosti extrémnych hodnôt na okrajoch s narastajúcou hodnotou limitnej dĺžky strany trojuholníka s_{LIM} . Zaujímavá je poloha modusu. Takmer vo všetkých prípadoch je modálnym intervalom interval $(-0,005; 0,005>$. Výnimku tvorí rozdelenie pravdepodobností výskytu diferencií z_x pri TIN s $s_{LIM} = 80m$, kde modálnym intervalom je interval $(0,005; 0,015>$.

Na kompenzáciu okrajových extrémnych odchýlok parciálnych derivácií by bolo potrebné navrhnuť optimalizačný algoritmus, ktorý by prekombinoval strany trojuholníkov v okolí bodov s týmito hodnotami, alebo by sa pokúsil upraviť trojuholníkovú sieť zjemňovaním, t.j. pribráním nevyužitých bodov z okolia za vytvorenia nových reprezentatívnejších trojuholníkov.

4 Záver

Výsledky doterajšieho výskumu nás podnecujú pokračovať ďalej vo vývoji algoritmov na optimalizáciu TIN tvorených iteratívne so zameraním na elimináciu odchýlok hodnôt parciálnych derivácií.

Referencie

1. BENOVÁ, A. *Georeliéf a modelovanie jeho geometrickej štruktúry pomocou KDMR*. Dizertačná práca, 2005, Prírodovedecká fakulta, Univerzita Komenského, Bratislava.
2. FECISKANIN, R. *Optimalizácia nepravidelných trojuholníkových sietí pre modelovanie georeliéfu*. Dizertačná práca, 2009, Prírodovedecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno.
3. IRING, M. *Hodnotenie presnosti digitálnych výškových modelov*. Diplomová práca, 2010, Prírodovedecká fakulta, Univerzita Komenského, Bratislava
4. KALIVODA, M. *KDMR – Algoritmus automatizovanej tvorby trojuholníkových sietí a priameho výpočtu parciálnych derivácií 1. rádu*. Bakalárska práca, 2012, Prírodovedecká fakulta, Univerzita Komenského, Bratislava.
5. KRCHO, J. *Morfometrická analýza a digitálne modely georeliéfu*. Veda, 1990, Bratislava, ISBN 80-224-0018-1.